

Introdução à Computação Gráfica Geometria

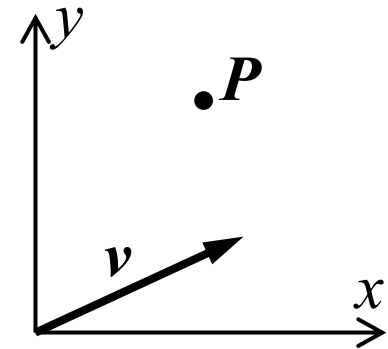
Claudio Esperança
Paulo Roma Cavalcanti

Pontos e Vetores (2D)

- Ponto: Denota posição no plano
- Vetor: Denota deslocamento, isto é, inclui a noção de direção e magnitude
- Ambos são normalmente expressos por pares de coordenadas (em 2D) mas não são a “mesma coisa”

$$P = (x_P, y_P)$$

$$\vec{v} = (x_v, y_v)$$



Operações com Pontos e Vetores (2D)

- Soma de vetores

$$t = v + u$$

- Multiplicação de vetor por escalar

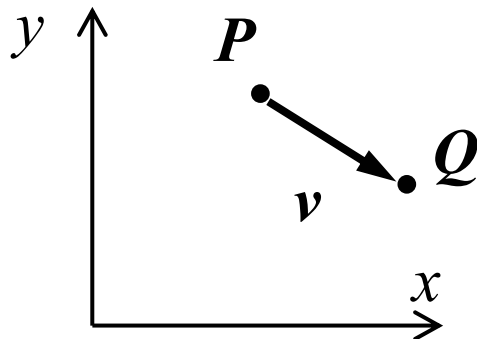
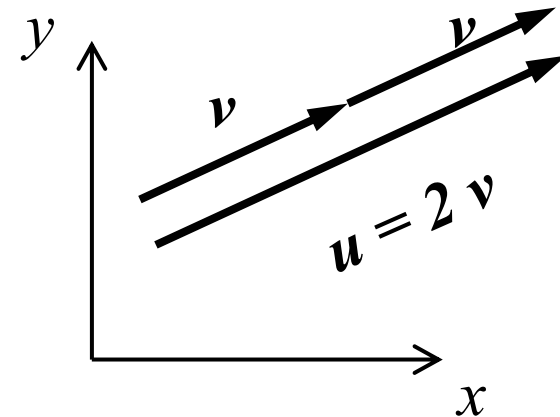
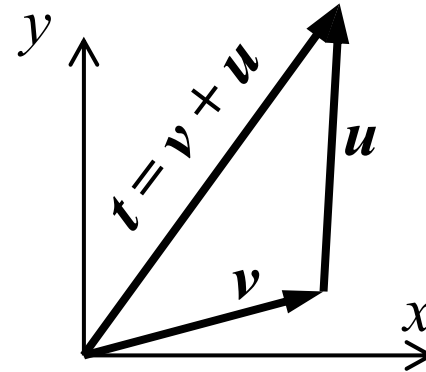
$$u = 2v$$

- Subtração de pontos

$$v = Q - P$$

- Soma de ponto com vetor

$$Q = P + v$$



Transformações

- Transformação é uma função que mapeia pontos de um espaço Euclidiano em outros (ou possivelmente os mesmos) pontos do mesmo espaço.
- Se uma transformação é linear, então
 - ◆ Se um conjunto de pontos está contido em uma reta, depois de transformados eles também estarão contidos sobre uma reta.
 - ◆ Se um ponto P guarda uma relação de distância com dois outros pontos Q e R, então essa relação de distância é mantida pela transformação.
- Transformação mapeia origem na origem?
 - ◆ Sim: Transformação *Linear*
 - ◆ Não: Transformação *Linear Afim*: Translações são permitidas

Transformações Lineares em 2D

- Uma transformação linear

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

- Uma transformação linear afim

$$\begin{cases} x' = ax + by + e \\ y' = cx + dy + f \end{cases}$$

Forma Matricial

- Mais conveniente para uso em um computador. Sejam

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

- Então uma transformação linear afim pode ser escrita $T(P) = P'$ onde

$$P' = A \times P + D$$

Transformando Vetores

- Um vetor não está atrelado a um ponto no espaço
- Uma transformação linear afim aplicada a um vetor não inclui translação
- Prova: Seja V um vetor e V' sua imagem sob a transformação linear afim, então:

$$V = Q - P \Leftrightarrow V' = Q' - P'$$

$$\begin{aligned} V' &= Q' - P' \\ &= (A \times Q + D) - (A \times P + D) \\ &= A \times (Q - P) \\ &= A \times V \end{aligned}$$

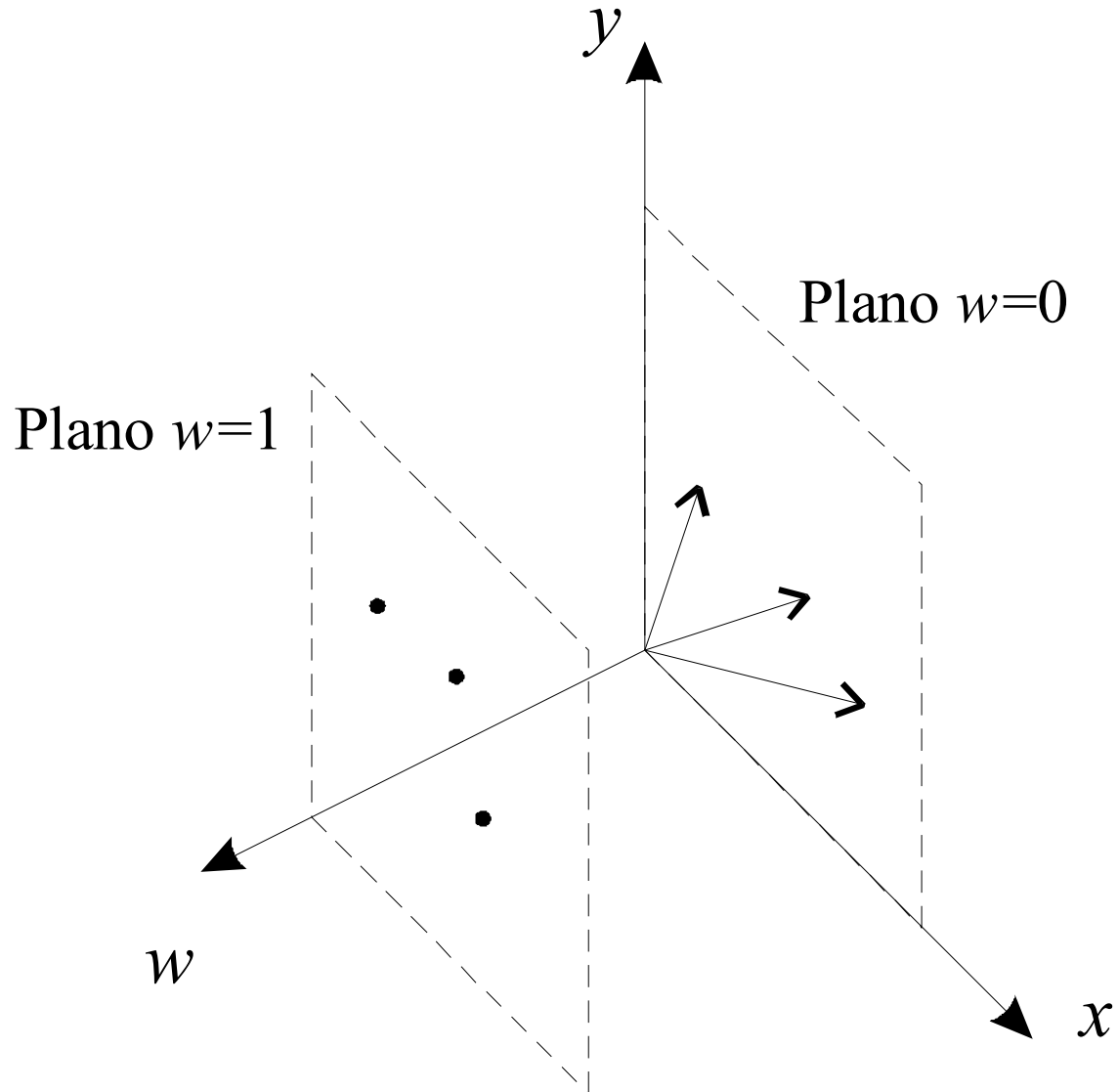
Coordenadas Homogêneas

- A transformação de vetores é operacionalmente diferente da de pontos
- Coordenadas homogêneas permitem unificar o tratamento
- Problema é levado para uma dimensão superior:
 - ◆ Coordenada extra $w=0$ para vetores e $=1$ p/ pontos
 - ◆ Termos independentes formam uma coluna extra na matriz de transformação

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

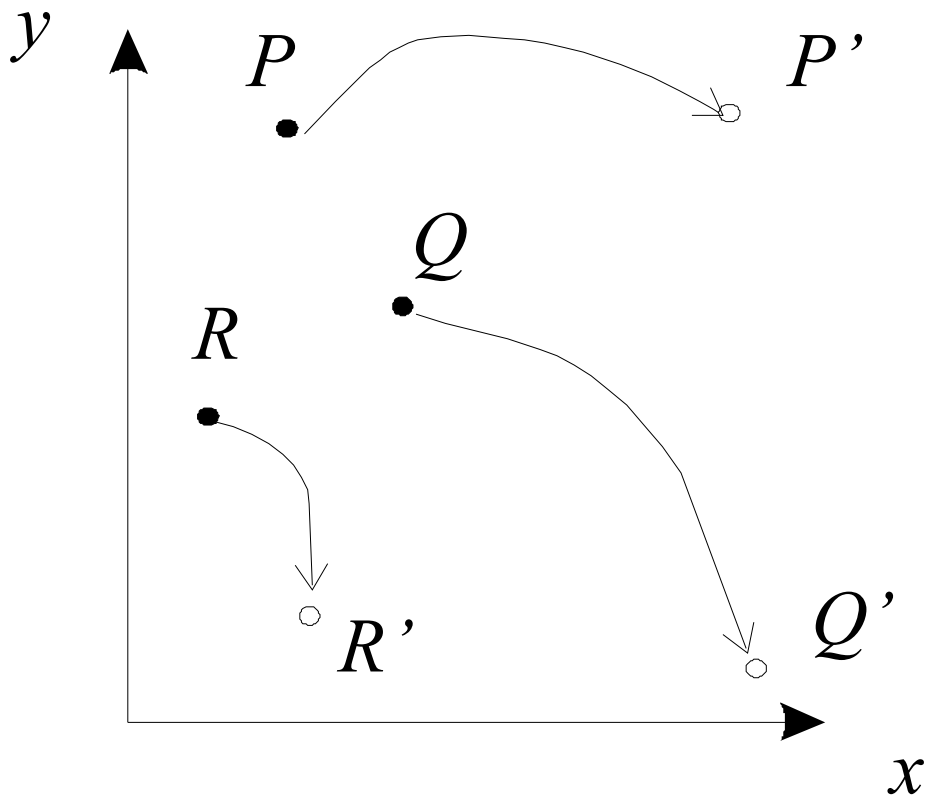
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}$$

Coordenadas Homogêneas - Interpretação



Modelando Transformações

- Uma t.l.a. em 2D pode ser definida se dispusermos da imagem de 3 pontos do domínio



$$\begin{cases} x_{P'} = a.x_P + b.y_P + e \\ y_{P'} = c.x_P + d.y_P + f \\ x_{Q'} = a.x_Q + b.y_Q + e \\ y_{Q'} = c.x_Q + d.y_Q + f \\ x_{R'} = a.x_R + b.y_R + e \\ y_{R'} = c.x_R + d.y_R + f \end{cases}$$

Sistemas de coordenadas

- Um sistema de coordenadas para \mathbf{R}^n é definido por um ponto (origem) e n vetores
- Ex. Seja um sistema de coordenadas para \mathbf{R}^2 definido pelo ponto O e os vetores X e Y . Então,
 - ♦ Um ponto P é dado por coordenadas x_P e y_P tais que

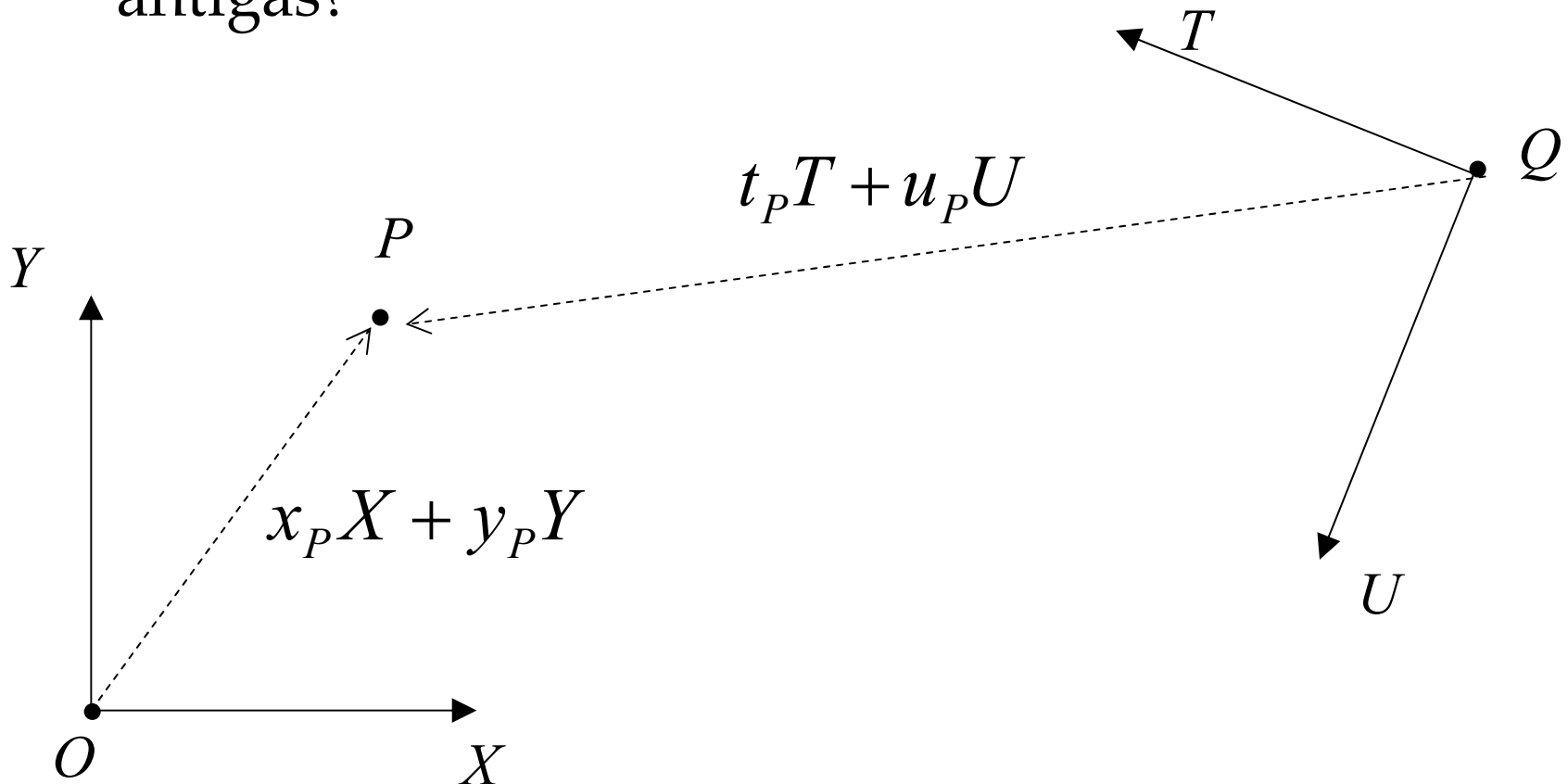
$$P = x_P \cdot X + y_P \cdot Y + O$$

- ♦ Um vetor V é dado por coordenadas x_V e y_V tais que

$$V = x_V \cdot X + y_V \cdot Y$$

Mudança de Sistema de Coordenadas

- Se estabelecemos um outro sistema (ex.: Q/T/U), como computar as novas coordenadas dadas as antigas?



Mudança de Sistema de Coordenadas

- Como computar as coordenadas de um ponto $P = (x_P, y_P)$ em $O/X/Y$ dadas as coordenadas de P em $Q/T/U$, isto é, (t_P, u_P) ?

$$\begin{aligned} P &= t_P.T + u_P.U + Q \\ &= t_P.(x_T.X + y_T.Y) + u_P.(x_U.X + y_U.Y) + (x_Q.X + y_Q.Y + O) \\ &= (t_P.x_T + u_P.x_U + x_Q).X + (t_P.y_T + u_P.y_U + y_Q).Y + O \end{aligned}$$

Logo,

$$x_P = t_P.x_T + u_P.x_U + x_Q$$

$$y_P = t_P.y_T + u_P.y_U + y_Q$$

Mudança de Sistema de Coordenadas

- Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_T & x_U \\ y_T & y_U \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} t_P \\ u_P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_Q \\ y_Q \end{bmatrix}$$

- Usando coordenadas homogêneas:

$$\begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_T & x_U & x_Q \\ y_T & y_U & y_Q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} t_P \\ u_P \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Para resolver o problema inverso:

$$\begin{bmatrix} t_P \\ u_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_T & x_U & x_Q \\ y_T & y_U & y_Q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ 1 \end{bmatrix}$$

Transformações em 3D

- Vetores e pontos em 3D

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \\ 0 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Transformação linear afim

$$T = \begin{bmatrix} a & b & c & j \\ d & e & f & k \\ g & h & i & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformações Rígidas

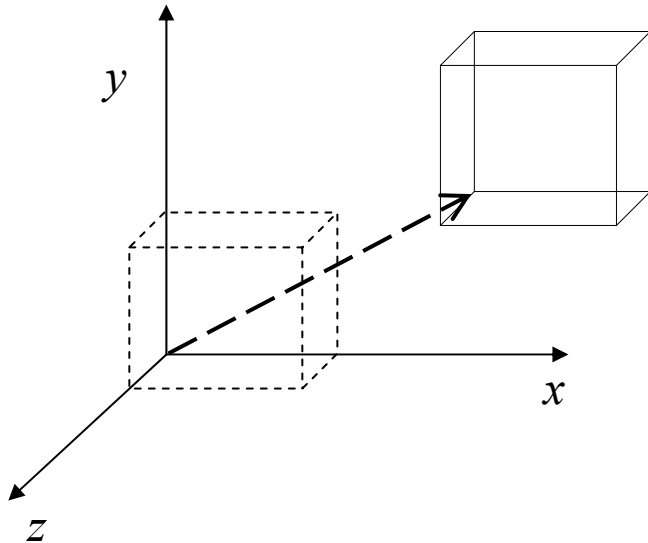
- Não modificam a forma (dimensões/ângulos) do objeto
- São compostas de uma rotação e uma translação

Submatriz de Rotação

Vetor de Translação

$$T = \begin{bmatrix} a & b & c & j \\ d & e & f & k \\ g & h & i & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Translação



$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_3 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

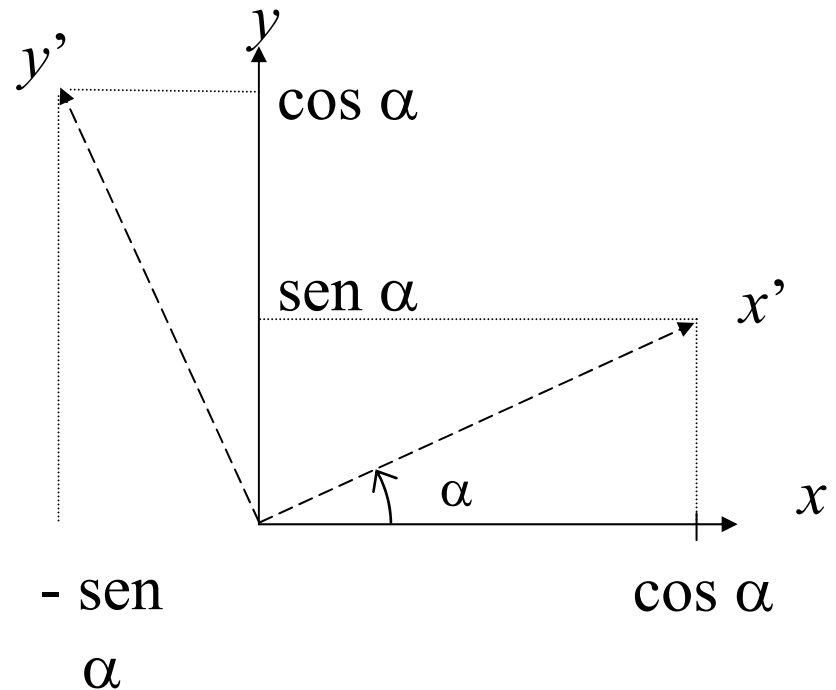
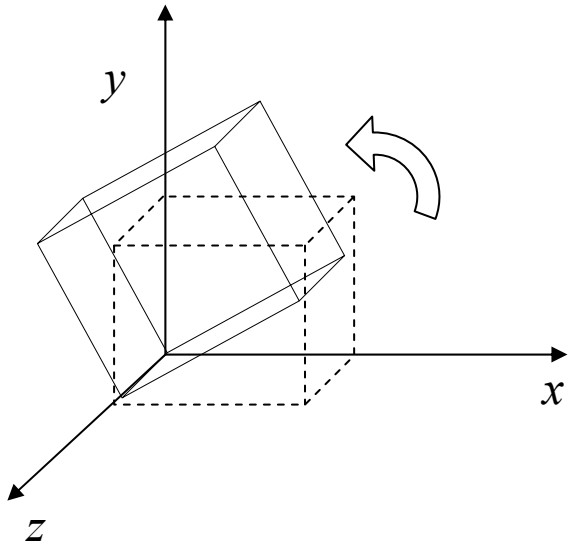
$$P' = T \times P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x + t_x \\ P_y + t_y \\ P_z + t_z \\ 1 \end{bmatrix} = P + t$$

- Observe que translações são comutativas:

$$P + t + v = P + v + t$$

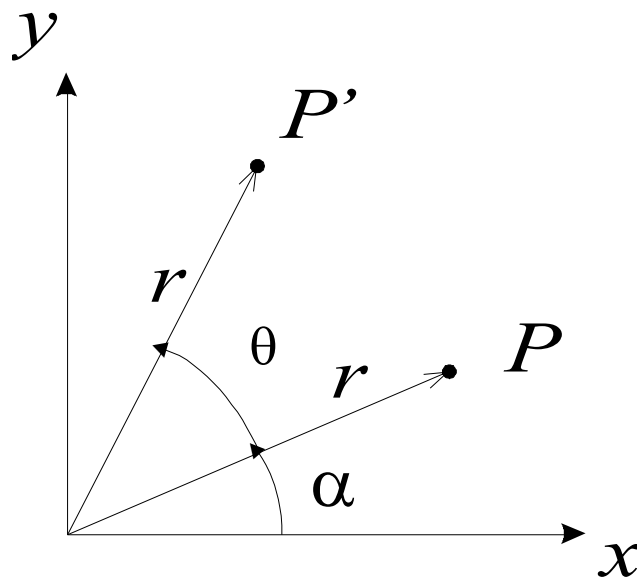
Rotação em torno do eixo Z

- Podemos ver que o vetor $(1,0,0)^T$ é mapeado em $(\cos \alpha, \sin \alpha, 0)^T$ e que o vetor $(0,1,0)^T$ é mapeado em $(-\sin \alpha, \cos \alpha, 0)^T$



Rotação em torno do eixo Z

- Outra maneira de ver:



- Sabemos que

$$P_x = r \cos \alpha \quad P'_x = r \cos(\alpha + \theta)$$

$$P_y = r \sin \alpha \quad P'_y = r \sin(\alpha + \theta)$$

- Então

$$P'_x = r \cos \alpha \cos \theta - r \sin \alpha \sin \theta$$

$$P'_y = r \cos \alpha \sin \theta + r \sin \alpha \cos \theta$$

- Ou, finalmente,

$$P'_x = P_x \cos \theta - P_y \sin \theta$$

$$P'_y = P_x \sin \theta + P_y \cos \theta$$

Rotação em torno dos eixos coordenados

- Rotação em torno de Z é dada pela matriz

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Similarmente, em torno dos eixos X e Y

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rotações em geral

- Qualquer rotação pode ser definida por um eixo de rotação dado pelo vetor unitário $\mathbf{u} = (x, y, z)^T$ e um ângulo de rotação α

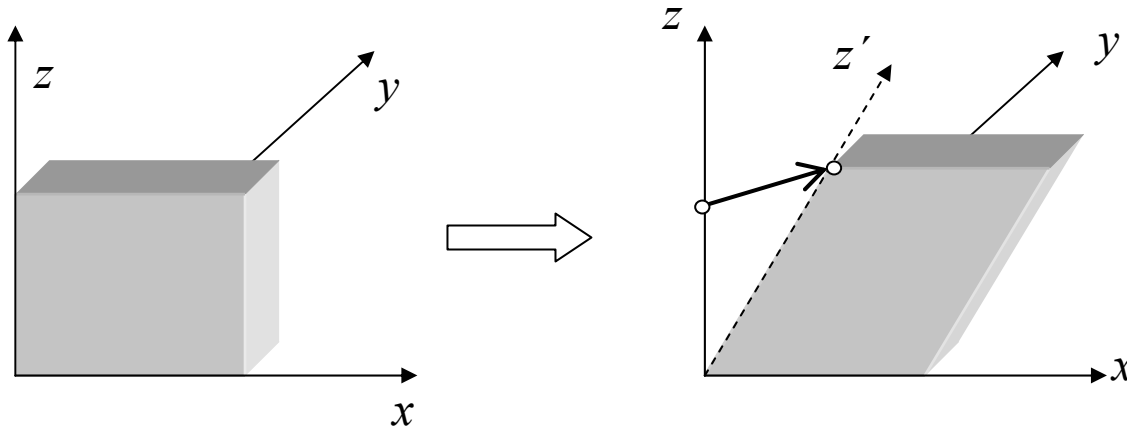
- Seja S a matriz

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}$$

- Então a submatriz de Rotação M é dada por
$$M = \mathbf{u}\mathbf{u}^T + (\cos \alpha)(\mathbf{I} - \mathbf{u}\mathbf{u}^T) + (\sin \alpha)S$$

Inclinação (“shear”)

- É uma transformação de deformação onde um eixo é “entortado” em relação aos demais

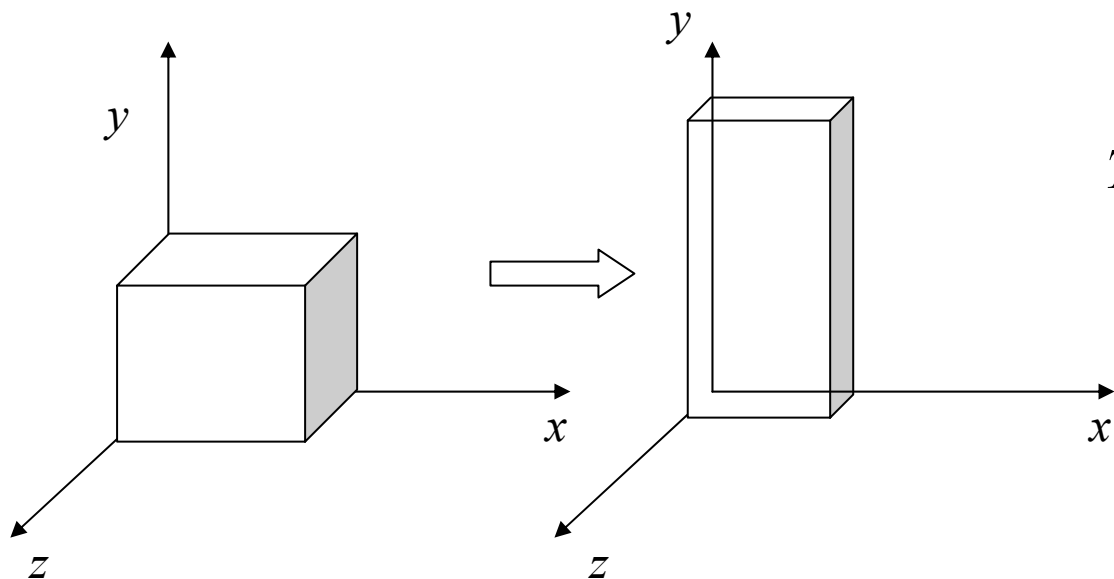


- Se o vetor unitário do eixo z é levado em $[Sh_x \ Sh_y \ 1 \ 0]^T$, então a matriz de transformação é dada por

$$T_{inclinação} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & Sh_x & 0 \\ 0 & 1 & Sh_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Escala

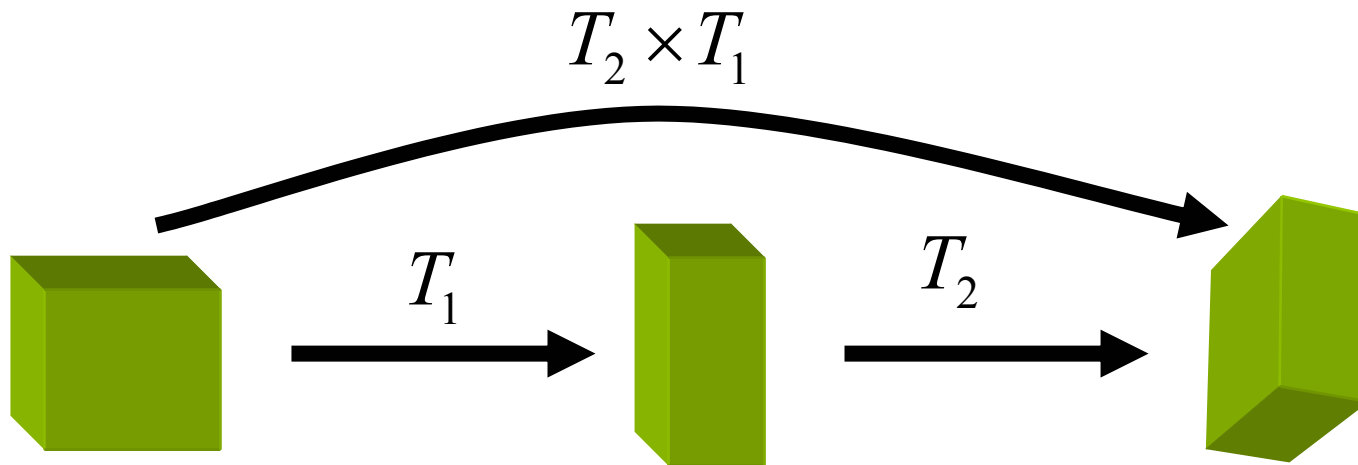
- Especificada por três fatores (S_x, S_y, S_z) que multiplicam os vetores unitários x, y, z
- Escala não é uma transformação rígida,
- Escala uniforme ($S_x = S_y = S_z$) entretanto, é uma operação ortogonal ou homotética, isto é, preserva os ângulos
- Para obter reflexão em torno do plano $z=0$, usar fatores de escala (1, 1, -1)



$$T_{escala} = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Composição de transformações em 3D

- Em nossa notação, usamos pré-multiplicação:
 - ♦ $P' = T \times P$
- Para compor 2 transformações temos:
 - ♦ Se $P' = T_1 \times P$ e $P'' = T_2 \times P'$, então, $P'' = T_2 \times T_1 \times P$



Geometria Afim

- Composta dos elementos básicos
 - ◆ escalares
 - ◆ pontos - denotam posição
 - ◆ vetores - denotam deslocamento (direção e magnitude)
- Operações
 - ◆ escalar \cdot vetor = vetor
 - ◆ vetor + vetor ou vetor - vetor = vetor
 - ◆ ponto - ponto = vetor
 - ◆ ponto + vetor ou ponto - vetor = ponto

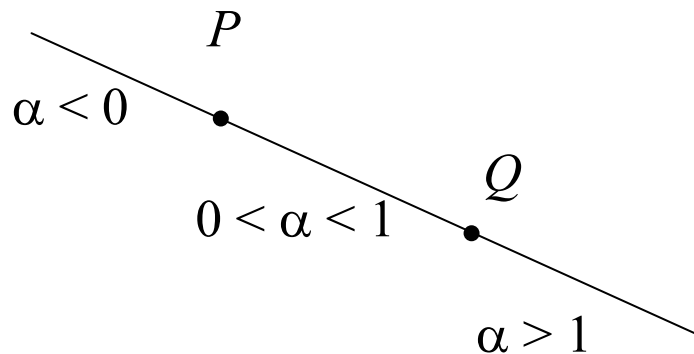
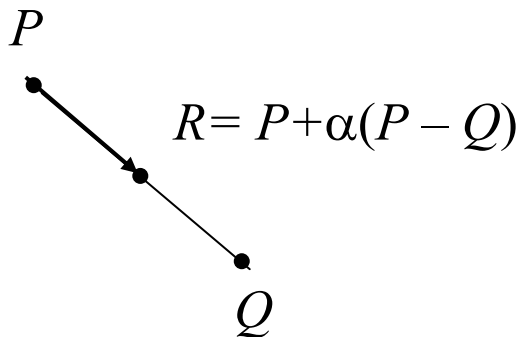
Combinações Afim

- Maneira especial de combinar pontos

$$\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \dots + \alpha_n P_n$$

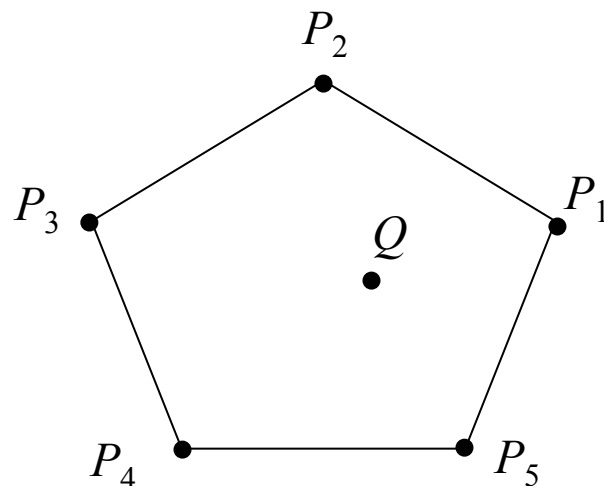
$$\text{onde } \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$$

- Para 2 pontos P e Q poderíamos ter uma combinação afim $R = (1 - \alpha)P + \alpha Q = P + \alpha(P - Q)$



Combinações Convexas

- Combinações afim onde se garante que todos os coeficientes α_i são positivos (ou zero)
- Usa-se esse nome porque qualquer ponto que é uma combinação convexa de n outros pontos pertence à envoltória convexa desses pontos



Geometria Euclidiana

- Extensão da geometria afim pela adição de um operador chamado *produto interno*
- Produto interno é um operador que mapeia um par de vetores em um escalar. Tem as seguintes propriedades:
 - ◆ Positividade : $(u,u) \geq 0$ e $(u,u) = 0$ sse $u=0$
 - ◆ Simetria: $(u,v) = (v,u)$
 - ◆ Bilinearidade: $(u,v+w) = (u,v) + (u,w)$ e
 $(u,\alpha v) = \alpha(u,v)$

Geometria Euclidiana

- Normalmente usamos o produto escalar como operador de produto interno:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^d u_i v_i$$

- Comprimento de um vetor é definido como:

$$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$

- Vetor unitário (normalizado):

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

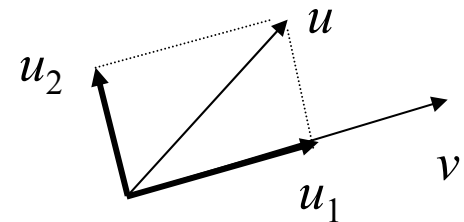
Geometria Euclidiana

- Distância entre dois pontos P e $Q = |P - Q|$
- O ângulo entre dois vetores pode ser determinado por

$$\hat{\text{ângulo}}(\vec{u}, \vec{v}) = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}\right) = \cos^{-1}(\hat{u} \cdot \hat{v})$$

- Projeção ortogonal: dados dois vetores u e v , deseja-se decompor u na soma de dois vetores u_1 e u_2 tais que u_1 é paralelo a v e u_2 é perpendicular a v

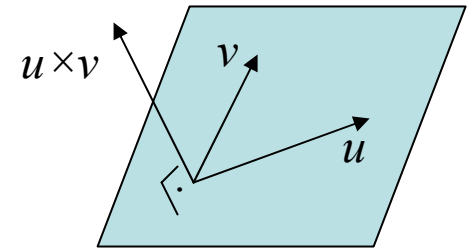
$$\vec{u}_1 = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{v} \cdot \vec{v}} \vec{v} \quad \vec{u}_2 = \vec{u} - \vec{u}_1$$



Produto Vetorial (3D)

- Permite achar um vetor perpendicular a outros dois dados
- Útil na construção de sistemas de coordenadas

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

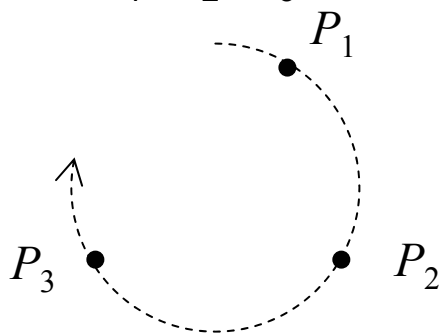


- Propriedades (assume-se u, v linearmente independentes):
 - ◆ Antisimetria: $u \times v = -v \times u$
 - ◆ Bilinearidade: $u \times (\alpha v) = \alpha (u \times v)$ e $u \times (v + w) = (u \times v) + (u \times w)$
 - ◆ $u \times v$ é perpendicular tanto a u quanto a v
 - ◆ O comprimento de $u \times v$ é igual a área do paralelogramo definido por u e v , isto é, $|u \times v| = |u| |v| \sin \theta$

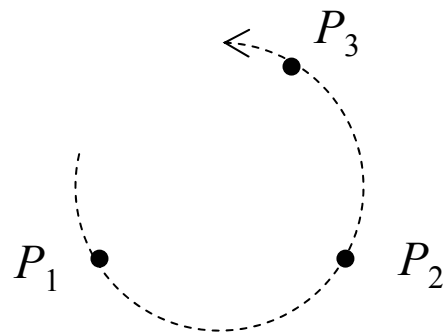
Orientação

- Orientação de 2 pontos em 1D
 - ♦ $P_1 < P_2$, $P_1 = P_2$ ou $P_1 > P_2$
- Orientação de 3 pontos em 2D
 - ♦ O percurso P_1, P_2, P_3 é feito no sentido dos ponteiros do relógio, no sentido contrário ou são colineares

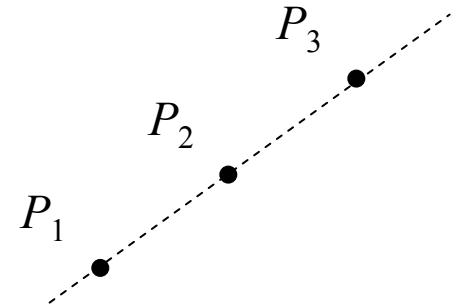
$$\text{Or}(P_1, P_2, P_3) = -1$$



$$\text{Or}(P_1, P_2, P_3) = +1$$



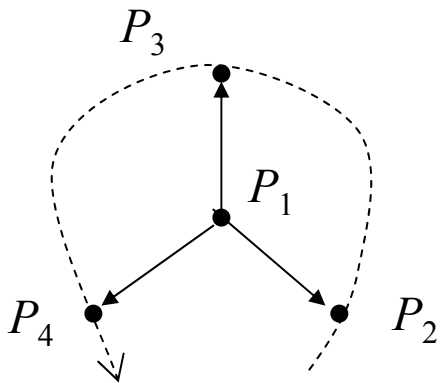
$$\text{Or}(P_1, P_2, P_3) = 0$$



Orientação

- Orientação de 4 pontos em 3D
 - ♦ O percurso P_1, P_2, P_3, P_4 define um parafuso segundo a regra da mão direita, mão esquerda ou são coplanares

$$\text{Or}(P_1, P_2, P_3, P_4) = +1$$



- *O conceito pode ser estendido a qualquer número de dimensões ...*

Computando orientação

- A orientação de $n+1$ pontos em um espaço n -dimensional é dado pelo sinal do determinante da matriz cujas colunas são as coordenadas homogêneas dos pontos *com o 1 vindo primeiro*

$$\text{Or}_2(P_1, P_2, P_3) = \text{sign} \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \right) \quad \text{Or}_3(P_1, P_2, P_3, P_4) = \text{sign} \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} \right)$$