

10 Visualização em 3D - Projeções

Após a criação de cenas e objetos tridimensionais o próximo passo é efetuar a sua apresentação. Assim deparamos com o problema de apresentar uma entidade tridimensional num meio bidimensional (2D), que é a tela bidimensional. A esse processo denominamos de **Projeção**. Este processo tem sido tratado exaustivamente por desenhistas, artistas, arquitetos, que buscaram técnicas e artifícios para o sistematizar e solucionar.

A tabela 1 apresenta uma taxonomia dos métodos de projeção.

Projeção Perspectiva

As técnicas utilizadas em projeção perspectiva são derivadas daquelas utilizadas pelos artistas e desenhistas profissionais. Pode-se dizer que o olho do observador coloca-se no *centro de projeção*, e o plano que deve conter o objeto ou cena projetada transforma-se no *plano de projeção*. Dois segmentos de reta que saem do centro de projeção e atingem o objeto projetado no plano de projeção, são chamadas de *projetantes* (veja a figura 10.1)

Os desenhos em perspectiva são caracterizados pelo encurtamento perspectivo e pelos pontos de fuga. O *encurtamento perspectivo*, é a ilusão de que os objetos e comprimentos são cada vez menores à medida que sua distância ao centro de projeção aumenta. Tem-se também a ilusão de que conjuntos de linhas paralelas que não são paralelas ao plano de projeção, convergem para um *ponto de fuga*. Denominam-se *pontos de fuga principais*, quando dá-se a aparência de haver uma intersecção entre um conjunto de retas paralelas com um dos eixos principais Ox , Oy ou Oz . O número de pontos de fuga principais é determinado pelo número de eixos principais intersectados pelo plano de projeção. Por exemplo: se o plano de projeção intercepta apenas o eixo z (então é perpendicular ao eixo z), somente o eixo z possui um ponto de fuga principal, pois linhas paralelas aos eixos x e y , são também paralelas ao plano de projeção, e dessa forma não ocorre a ilusão de convergência.

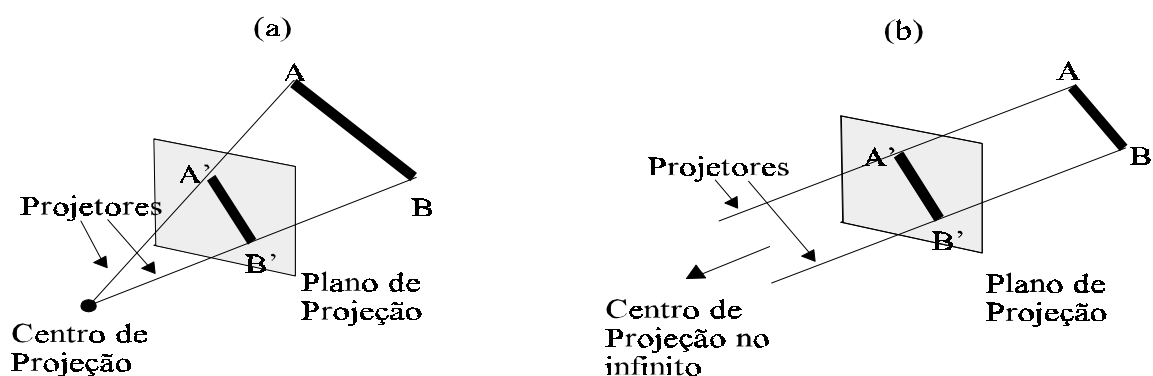


Figura 10.1 - (a) Linha **AB** e sua projeção perspectiva **A'B'**. (b) Linha **AB** e sua projeção paralela **A'B'**. Os projetores **AA'** e **BB'** são paralelos.

Projeções Perspectivas são categorizadas pelo seu número de pontos de fuga principais, ou seja o número de eixos que o plano de projeção intercepta. A figura 10.2 mostra 2 projeções perspectivas (com um ponto de fuga) distintas de um cubo. Está claro que possui apenas um ponto de fuga? Somente as linhas paralelas ao eixo z convergem, e as linhas paralelas aos eixos x e y continuam paralelas!

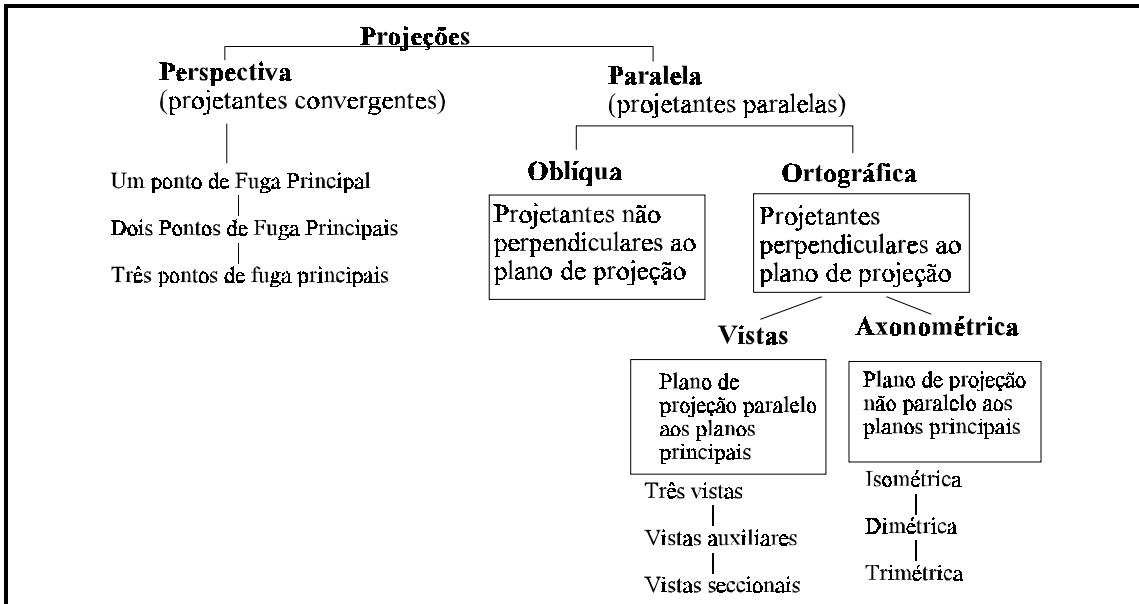


Tabela 1 - Taxonomia das projeções [Plastock_91].

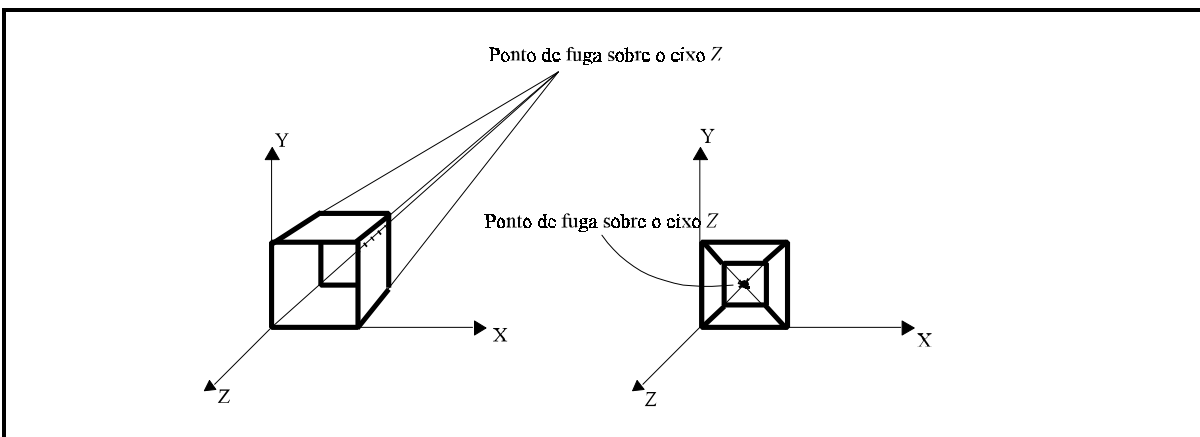


Figura 10.2 - Projeções de um cubo (com 1 ponto de fuga) sobre um plano cortando o eixo Z, apresentado o ponto de fuga.

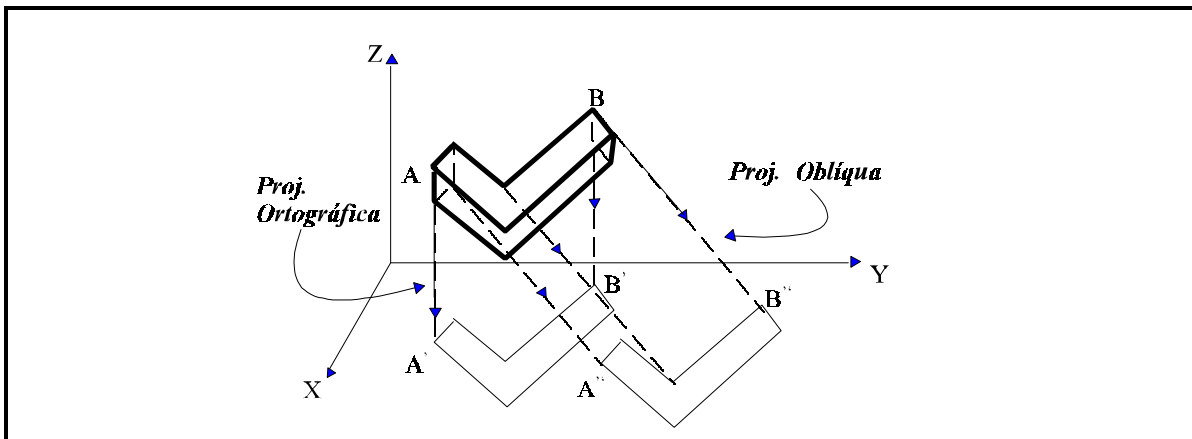


Figura 10.3 - Representação das projeções paralelas ortográfica e oblíqua.

A figura 10.3 apresenta graficamente as projeções paralelas ortográficas e oblíquas. As projeções ortográficas são muito utilizadas em engenharia para produzir vistas de plantas e objetos.

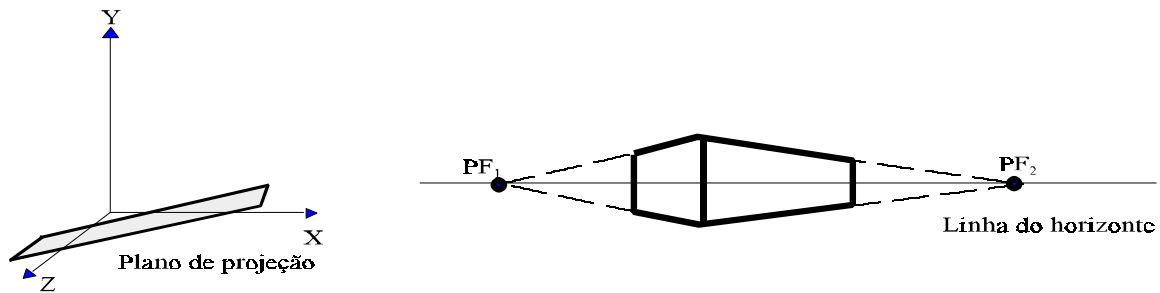


Figura 10.4 - Projeção Perspectiva com 2 pontos de fuga principais (o plano de projeção intercepta 2 eixos (x e z)).

Projeções perspectivas com 2 pontos de fuga (quando 2 eixos principais são interceptados pelo plano de projeção) são mais comumente usadas em arquitetura, engenharia, desenho publicitário e projeto industrial (ver figura 10.4). Já as projeções perspectivas com 3 pontos de fuga são bem menos utilizadas, pois adicionam muito pouco em termos de realismo comparativamente às projeções com 2 pontos de fuga, e o custo de implementação é bem maior (veja figura 10.5).

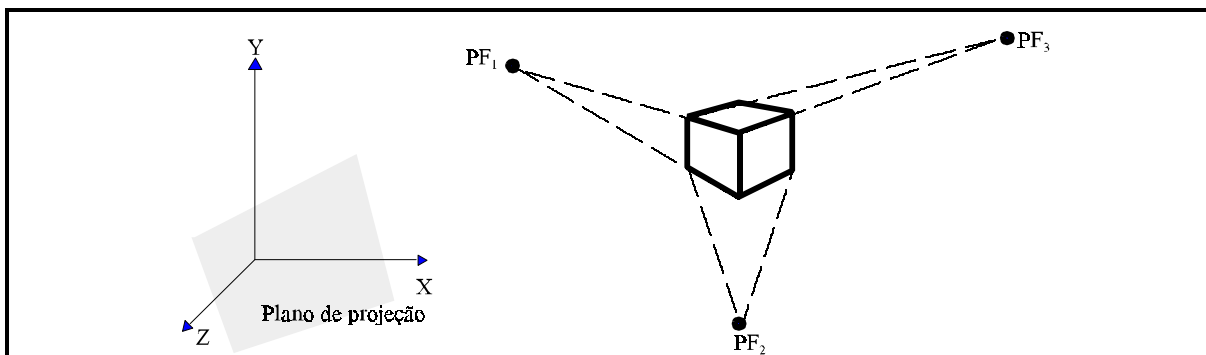


Figura 10.5 - Projeção perspectiva com 3 pontos de fuga principais (o plano de projeção intercepta 3 eixos).

Anomalias da Perspectiva

A projeção perspectiva introduz certas anomalias que aumentam o realismo em termos de profundidade, mas também alteram as medidas e formas reais dos objetos.

1. **Encurtamento perspectivo:** Quanto mais distante um objeto está do centro de projeção, menor parece ser (o tamanho de sua projeção torna-se menor), como mostra a figura 10.6.
2. **pontos de Fuga:** As projeções de retas não paralelas ao plano de projeção, provocam a ilusão de que se interceptam num ponto do horizonte.
3. **Confusão Visual:** Os objetos situados atrás do centro de projeção são projetados no plano de projeção de cima para baixo e de trás para a frente (ver figura 10.7)
4. **Distorção Topológica:** Consideremos o plano que contém o centro de projeção e que é paralelo ao plano de projeção. Os pontos deste plano são projetados no infinito pela transformação

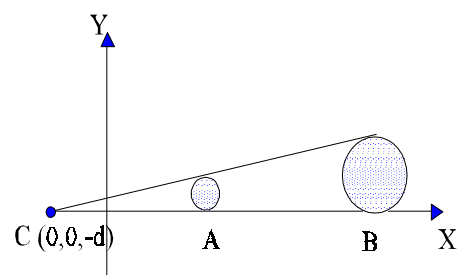


Figura 10.6- A esfera B é bem maior que A, porém ambas parecem do mesmo tamanho quando projetadas no plano de visão.

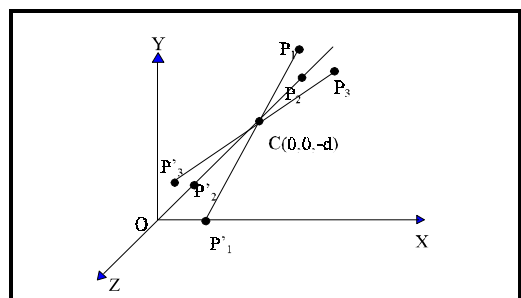


Figura 10.7 - Confusão visual da perspectiva (objeto atrás do centro de projeção).

perspectiva. Em particular, um segmento de reta que une um ponto situado à frente do observador a um ponto situado atrás dele e efetivamente projetado segundo uma linha quebrada de comprimento infinito.

Desenvolvimento Matemático para Projeções Geométricas

Inicialmente, vamos supor que no caso de projeção perspectiva, o plano de projeção é normal ao eixo z , em $z=d$. Para a projeção paralela o plano de projeção está em $z=0$. As projeções perspectiva e paralela podem ser definidas através de matrizes 4×4 , o que é interessante para a composição de transformações juntamente com a projeção.

Assim, seja o plano de projeção que se encontra a uma distância d da origem, e P o ponto que será projetado sobre ele. Para calcular o ponto $P_p=(x_p, y_p, z_p)$, que é a projeção perspectiva de (x,y,z) sobre o plano de projeção em $z=d$. Usando a semelhança de triângulos (ver fig 10.7), temos:

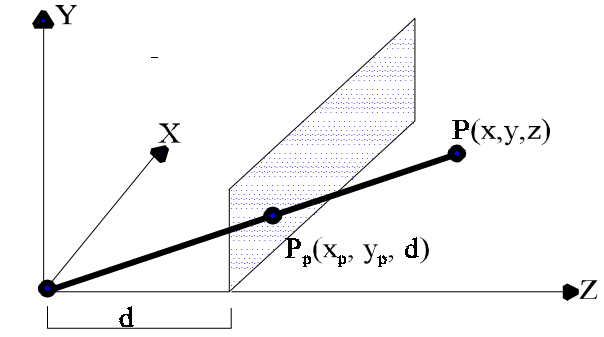


Figura 10.7 - Projeção Perspectiva.

$$\frac{x_p}{d} = \frac{x}{z} \quad \frac{y_p}{d} = \frac{y}{z} \tag{10.1}$$

$$x_p = \frac{d \cdot x}{z} = \frac{x}{z/d} \quad y_p = \frac{d \cdot y}{z} = \frac{y}{z/d} \tag{10.2}$$

A distância d pode ser vista como o fator de escala que se aplica a x_p e y_p . Na projeção perspectiva, a divisão por z faz com que os objetos mais distantes do plano de projeção pareçam menores do que os que estão mais próximos. Todos os valores de z podem ocorrer (salvo $z=0$).

A transformação da equação (10.2) pode ser expressa como:

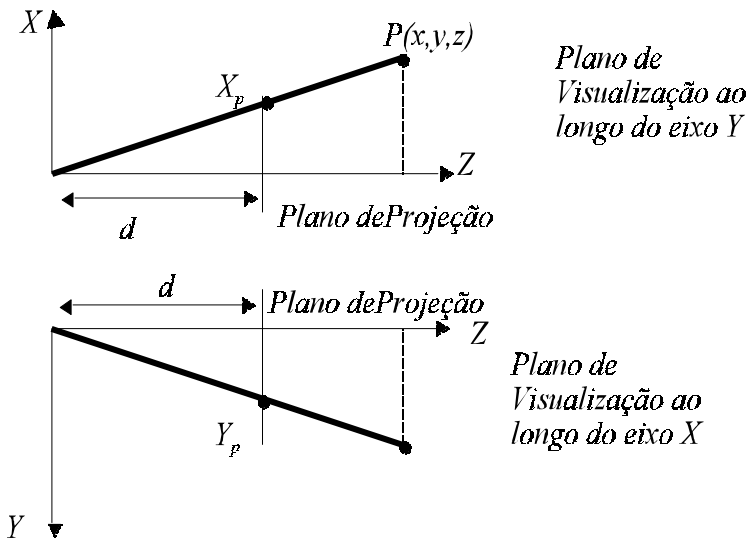


Figura 10.8 - Projeção perspectiva - continuação.

$$M_{per} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 0 \end{bmatrix}$$

Multiplicando a matriz M_{per} pelo ponto P , teremos um ponto em coordenadas homogêneas $[X \ Y \ Z \ W]^T$:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{bmatrix} = M_{per} \cdot P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Então dividindo por W , (que é z/d) para obter as coordenadas cartesianas, temos:

$$\left(\frac{X}{W}, \frac{Y}{W}, \frac{Z}{W} \right) = (x_p, y_p, z_p) = \left(\frac{x}{z/d}, \frac{y}{z/d}, d \right)$$

Vemos que formulação deriva diretamente do resultado da equação (10.1), e a coordenada z como d , vem da posição do plano de projeção sobre o eixo z (normal ao eixo z).

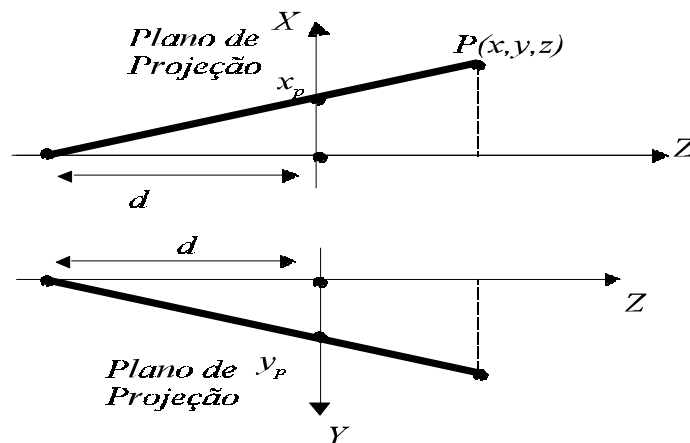


Figura 10.9 - Projeção Perspectiva alternativa.

Uma outra forma de construir projeções perspectivas, é colocando o plano de projeção em $z=0$, e o centro de projeção (COP) em $z=-d$, como na figura 10.9.

Da mesma forma a partir dos triângulos semelhantes, temos:

$$\frac{x_p}{d} = \frac{x}{z+d} \quad \frac{y_p}{d} = \frac{y}{z+d}$$

$$x_p = \frac{d \cdot x}{z+d} = \frac{x}{(z/d)+1} \quad y_p = \frac{d \cdot y}{z+d} = \frac{y}{(z/d)+1}$$

Assim a matriz de projeção perspectiva fica:

$$M_{per2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 0 \end{bmatrix}$$

A projeção ortográfica com o plano de projeção em $z=0$ obtém-se diretamente, fazendo $z_p=0$, e a matriz fica:

$$M_{ortgraf} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bibliografia

- [PLASTOCK_91] Roy Plastock e Gordon Kalley: "Computação Gráfica", Mc Graw Hill, 1990.
 [FOLEY_90] Foley, J. D. Et al: "Computer Graphics - Principles and Practice Second Edition", Addison-Wesley Publishing Co., 1990.

A. J. M. Traina M.C.F. de Oliveira
 1º semestre de 2001