

Fundamentos Matemáticos

Como e porque Algoritmos Genéticos funcionam?

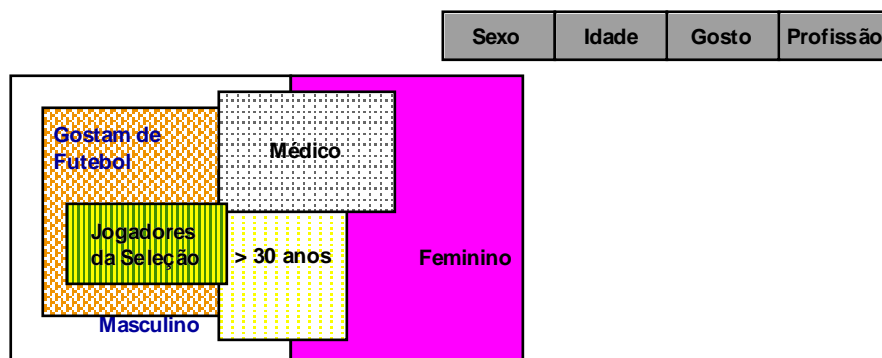
Teoria de Schema (John Holland 1975)

“Schema é um padrão genético que descreve um conjunto de cromossomas do espaço de busca com similaridades em certas posições”



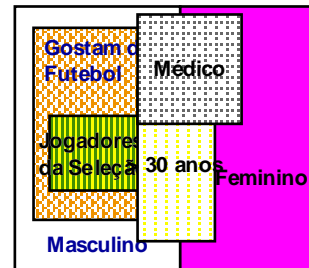
Schema

- Buscando padrões de jogadores de seleção



Aptidão dos Padrões

Sexo	Idade	Gosto	Profissão	Aptidão
Masculino	$I > 30$	X	X	baixa
Feminino	X	X	X	baixa
Masculino	$I < 30$	X	X	boa
X	X	Sim	Médico	baixa



Representação de um Schema

- Utiliza-se um símbolo adicional:
* = don't care
- Exemplo: **H= 1 1 ***

H é um padrão que descreve todos os cromossomas do espaço 2^3 , cujos os dois primeiros bits são iguais a '1', não importando os demais.

Interpretação

- $f(x) = x^2$, $x \in 2^3$
- **Seja o schema: H= 1 1 ***
- H refere-se a conjectura que a razão pela qual 111 e 110 são bons cromossomas (ou não), são os dois bits mais significativos iguais a '1', não importando os demais.
- Para esta conjectura "podem" existir numa determinada população dois representantes: 110 e 111.
- **110 e 111 "pertencem" a H= 1 1 ***



Número de Schemata

- Seja o espaço de busca K^L onde:
K \equiv número de elementos do alfabeto de representação
L \equiv comprimento do cromossoma

$$\rightarrow \text{Total de Schemata} = (K+1)^L$$

- Exemplo: K=2; L=3

$$2^3 = 8 \text{ pontos}$$

$$\text{Total de Schemata} = 27$$



Ordem de um Schema

- Ordem ou Especificidade $O(H)$

$O(H) \equiv$ número de posições fixas (diferentes de *) presentes no schema

$H = 0\ 1\ 1\ *1\ **$

$O(H) = 4$

$H = 0\ **\ **\ **$

$O(H) = 1$



Comprimento de um Schema

- $\delta(H) \equiv$ distância entre a primeira e a última posições específicas (diferentes de *) no schema.

$H = 0\ 1\ 1\ *1\ **$

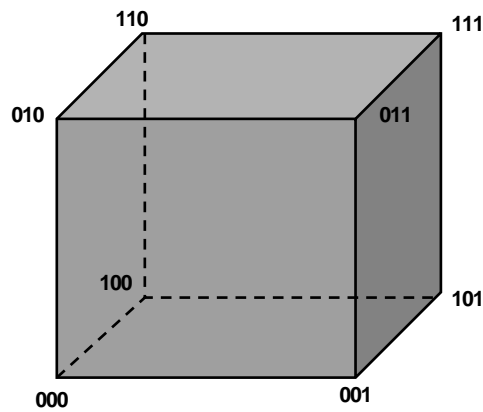
$\delta(H) = 4$

$H = 0\ **\ **\ **$

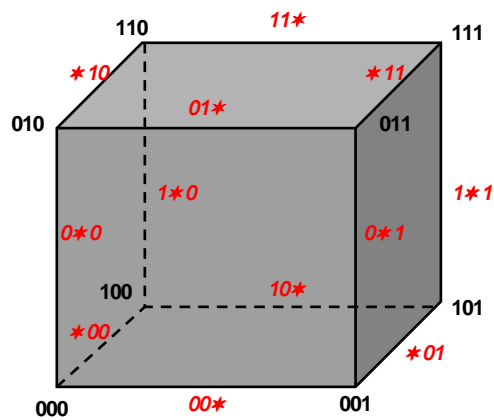
$\delta(H) = 0$



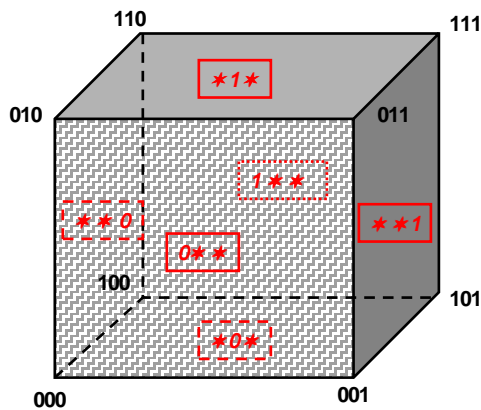
Representação Geométrica Schemata de Ordem 3: Pontos



Representação Geométrica Schemata de Ordem 2: Linhas



Representação Geométrica Schemata de Ordem 1: Planos



Indivíduos Pertencentes ao um Schema

- Um indivíduo pertence a um schema se para todas as L posições o símbolo do indivíduo é igual ao símbolo do schema, exceto nas posições onde o símbolo do schema é don't care (*).
- Um schema possui $2^{L-O(H)}$ indivíduos.
- Exemplo: * 1 * possui 2^{3-1} indivíduos

0 1 0
0 1 1
1 1 0
1 1 1

Indivíduos Pertencentes ao Schema

	Schema	Indivíduos							
1	0 0 0	0 0 0							
2	0 0 1	0 0 1							
3	0 0 *	0 0 0	0 0 1						
4	0 1 0	0 1 0							
5	0 1 1	0 1 1							
6	0 1 *	0 1 0	0 1 1						
7	0 * 0	0 0 0	0 1 0						
8	0 * 1	0 0 1	0 1 1						
9	0 **	0 0 0	0 0 1	0 1 0	0 1 1				
10	1 0 0	1 0 0							
11	1 0 1	1 0 1							
12	1 0 *	1 0 0	1 0 1						
13	1 1 0	1 1 0							
14	1 1 1	1 1 1							
15	1 1 *	1 1 0	1 1 1						
16	1 * 0	1 0 0	1 1 0						
17	1 * 1	1 0 1	1 1 1						
18	1 **	1 0 0	1 0 1	1 1 0	1 1 1				
19	* 0 0	0 0 0	1 0 0						
20	* 0 1	0 0 1	1 0 1						
21	* 0 *	0 0 0	0 0 1	1 0 0	1 0 1				
22	* 1 0	0 1 0	1 1 0						
23	* 1 1	0 1 1	1 1 1						
24	* 1 *	0 1 0	0 1 1	1 1 0	1 1 1				
25	** 0	0 0 0	0 1 0	1 0 0	1 1 0				
26	** 1	0 0 1	0 1 1	1 0 1	1 1 1				
27	***	0 0 0	0 0 1	0 1 0	0 1 1	1 0 0	1 0 1	1 1 0	1 1 1

Schemata representados por um indivíduo

- Um indivíduo representa 2^L schemata.
- Para cada uma das L posições de um indivíduo, define-se um schema diferente, usando o símbolo presente no indivíduo ou o símbolo '*'.
- Exemplo: **0 1 0** representa os seguintes schemata:

0 1 0
 * 1 0
 0 * 0
 0 1 *
 0 * *
 * 1 *
 * * 0
 * * *



Porque utilizar schema?

- Porque considerar $(K+1)^L$ ao invés de considerar apenas K^L indivíduos?
- John Holland procurou mostrar com schemata, o paralelismo da busca através do espaço de soluções.
- Há mais informações nos schemata para guiar a busca do que simplesmente nos indivíduos.
- Numa população de n indivíduos, onde cada indivíduo representa 2^L schemata, há entre 2^L e $n \cdot 2^L$ schemata, dependendo da diversidade da população.
- J. Holland mostrou que o número de schemata processados a cada geração é proporcional a n^3
- **Paralelismo Implícito** ➔ um GA processa n^3 schemata em paralelo, enquanto avalia n indivíduos.

Teorema Fundamental de GA

Schemata permitem analisar o efeito global da reprodução e dos operadores genéticos.

- **Efeito da Seleção**
- **Efeito do Crossover**
- **Efeito da Mutação**

Efeito da Seleção

- Seja $m(H,t)$ o número de representantes do schema H na população no ciclo t.
- Sabemos que, $p_i = f_i / \sum f_j$ é a probabilidade do cromossoma i ser escolhido.
- Então, o número esperado de representantes de H no ciclo seguinte (t+1) é:

$$m(H, t+1) = n \cdot \sum_{i \in H} f_i / \sum^n f_j$$



$$m(H, t+1) = n \cdot \sum_{i \in H} f_i / \sum^n f_j$$

- Definindo a aptidão média do schema H, como

$$f(H) = \sum_{i \in H} f_i / m(H,t) \quad \text{então,}$$

$$m(H, t+1) = m(H, t) \cdot n \cdot f(H) / \sum^n f_j$$

- Como $f_{\text{médio}} = \sum^n f_j / n$ então,

$$m(H, t+1) = m(H, t) \cdot f(H) / f_{\text{médio}}$$

Analisando podemos dizer que:

- 1- Schemata com aptidão acima da média proliferam;
- 2- Schemata com aptidão abaixo da média tendem a desaparecer.



Taxa de Evolução

- Supondo H acima da média de um fator constante C estacionário, a partir de t=0:

$$m(H, t+1) = m(H, t) \cdot (f_{\text{médio}} + C \cdot f_{\text{médio}}) / f_{\text{médio}}$$

$$m(H, t+1) = m(H, t) \cdot (1+C)$$

- Assim, para qualquer t temos:

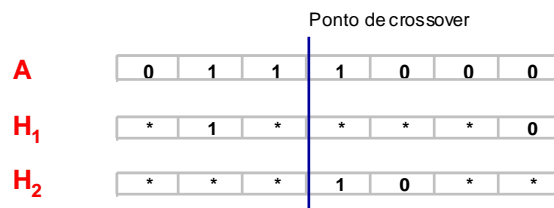
$$m(H, t+1) = m(H, 0) \cdot (1+C)^t$$

O número de ocorrências nas gerações sucessivas de bons (maus) schemata, cresce (decresce) exponencialmente.



Efeito do Crossover

- Ex: A vai cruzar com outro genitor; o que acontece a H_1 e H_2 ?



H_1 será destruído e padrão não será transmitido aos descendentes a não ser que par genitor de A possa recuperar padrão.

H_2 sobreviverá e será transmitido a um dos descendentes.



Probabilidade de Destruição

$$p_d = \delta(H) / (L-1)$$

- A probabilidade de sobrevivência de H é,

$$p_s = 1 - \delta(H) / (L-1)$$

- Então, considerando a probabilidade do crossover e a recuperação de H após o crossover temos,

$$p_s \geq 1 - p_c \cdot \delta(H) / (L-1)$$

- Portanto,

$$m(H, t+1) \geq m(H, t) \cdot f(H) / f_{\text{médio}} [1 - p_c \cdot \delta(H) / (L-1)]$$



Efeito da Mutação

- Seja, p_m a probabilidade de uma posição sofrer mutação.
- $1 - p_m$ é a probabilidade de sobrevivência.
- H tem $O(H)$ posições fixas
- Assim, a probabilidade de sobrevivência do schema é:

$$(1 - p_m)^{O(H)}$$

- Sabendo que $p_m \ll 1$, então

$$(1 - p_m)^{O(H)} \approx 1 - O(H) \cdot p_m$$



Teorema Fundamental de GA

$$m(H, t+1) \geq m(H, t) \cdot f(H) / f_{\text{m\u00e9dio}} [1 - p_c \cdot \delta(H) / (L-1)] \cdot [1 - O(H) \cdot p_m]$$

“Schemata curtos, de baixa ordem e com alta aptidão tendem a proliferar nas gerações sucessivas, a uma taxa exponencial.”



Hip\u00f3tese dos Blocos Construtores

Assim como uma crian\u00e7a cria grandes castelos empilhando pequenos blocos, um algoritmo gen\u00e9tico busca desempenho pr\u00f3ximo do \u00f3timo atrav\u00e9s da justaposi\u00e7\u00e3o de schemata curtos, de baixa ordem e de alta aptid\u00e3o, ou blocos construtores.



Processando Schemata

Número	População				x	f(x)	Prob.	Número	Result.	
	Inicial		Inteiro	x2						Seleçã
1	0	1	1	0	1	13	169	0,14	0,58	1
2	1	1	0	0	0	24	576	0,49	1,97	2
3	0	1	0	0	0	8	64	0,05	0,22	0
4	1	0	0	1	1	19	361	0,31	1,23	1
Soma						1170	1.00	4,00	4	
Média						293	0,25	1	1	
Máximo						576	0,49	1,97	2	
Após Seleçã										
						comp(H)	O(H)	Repres.	f(H)	m(H,t+1)
H1	1	*	*	*	*	0	1	2,4	469	3,2
H2	*	1	0	*	*	1	2	2,3	320	2,18
H3	1	*	*	*	*	0	4	2	576	1,97

$$= \sum_{i \in H} f_i / m(H,t) \quad = m(H,t) \cdot f(H) / f_{\text{médio}}$$



Processando Schemata

Número	População				x	f(x)	Prob.	Número	Result.	Pares de Genitores e				Nova População				x	f(x)						
	Inicial		Inteiro	x2						Seleçã	Descen.	Roleta	Portos de Corte												
1	0	1	1	0	1	13	169	0,14	0,58	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	12	144			
2	1	1	0	0	0	24	576	0,49	1,97	2	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	25	625	
3	0	1	0	0	0	8	64	0,05	0,22	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	27	729		
4	1	0	0	1	1	19	361	0,31	1,23	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	16	256		
Soma						1170	1.00	4,00	4													1754			
Média						293	0,25	1	1													439			
Máximo						576	0,49	1,97	2													729			
Processamento de Schemata																									
Após Seleçã										Após Crossover															
						comp(H)	O(H)	Repres.	f(H)	m(H,t+1)	real											Repres.	m(H+1)	real	Repres.
H1	1	*	*	*	*	0	1	2,4	469	3,2	3											2,34	3,2	3	2,34
H2	*	1	0	*	*	1	2	2,3	320	2,18	2											2,3	1,64	2	2,3
H3	1	*	*	*	*	0	4	2	576	1,97	2											2,3	0	1	4

$$= \sum_{i \in H} f_i / m(H,t) \quad = m(H,t) \cdot f(H) / f_{\text{médio}} \quad = m(H,t) \cdot f(H) / f_{\text{médio}} [1 - p_c \cdot \delta(H) / (L-1)]$$



Planilha Fundamentos de GA

Núm.	População Inicial	x inteiro	f(x) = x ²	Prob. Seleção	Núm. Descende	Execução Automática	Result. Roda	Pares de Genitores e Pontos de Corte
1	1 1 1 0 0	28	784	0,0953539	0,953539			2 1 1 1 0 0 5
2	1 1 1 0 0	28	784	0,0953539	0,953539	Seleção		0 1 1 1 0 0 5
3	1 1 1 1 0	30	900	0,1094624	1,094624			3 1 1 1 1 0 2
4	1 1 1 0 1	29	841	0,1022865	1,022865	Crossover		3 1 1 1 0 0 2
5	1 1 1 1 0	30	900	0,1094624	1,094624			1 1 1 1 1 0 1
6	1 1 1 1 0	30	900	0,1094624	1,094624	Mutação		0 1 1 1 1 0 1
7	1 1 1 1 0	30	900	0,1094624	1,094624			0 1 1 1 1 0 5
8	1 1 1 1 0	30	900	0,1094624	1,094624			0 1 1 1 1 0 5
9	1 0 1 1 1	23	529	0,0643396	0,643396	Executar		1 1 1 1 1 0 5
10	1 1 1 1 0	28	784	0,0953539	0,953539			0 1 1 1 1 0 5
Soma		10	286	8222	1			10
Média			28,6	822,2	0,1			1
Máximo			30	900	0,1094624			3

Configurações	
Gerar População	População: 10 (até 10)
Nova Geração	Crossover: 0,6 (0 a 1)
Evoluir Gerações	Mutação: 0,08 (0 a 1)
	Gerações: 20

Schemata		comp(H)	Q(H)	Representante f(H)	m(H,t+1)	Real	Representantes
H1	1 * * * *	0	1	10 {1,2,3,4}	822,2	10,0000001	10 {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}
H2	* 1 0 * *	1	1	2 0 {}	0	0 0 {}	
H3	1 * * * 0	4	2	8 {1,2,3,5,6}	856,5	8,33373875	10 {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}
H4		4	0	0 0 {}	0	0 0 {}	
H5		4	0	0 0 {}	0	0 0 {}	

Efeito da Cardinalidade

x	Binário	Não Binário	Aptidão
0	0 0 0 0	A	0
1	0 0 0 1	B	1
2	0 0 1 0	C	4
3	0 0 1 1	D	9
4	0 1 0 0	E	16
5	0 1 0 1	F	25
6	0 1 1 0	G	36
7	0 1 1 1	H	49
8	1 0 0 0	I	64
9	1 0 0 1	J	81
10	1 0 1 0	K	100
11	1 0 1 1	L	121
12	1 1 0 0	M	144
13	1 1 0 1	N	169
14	1 1 1 0	O	196
15	1 1 1 1	P	225
Espaço	16	16	
Cardinalidade	2	16	
Schemata	81	17	

Conclusões

- GA explora similaridades em codificações arbitrárias através de schema.
- A codificação binária é simples e eficiente, oferecendo o número máximo de schemata, porém nem sempre é adequada.
- A representação de cromossomas é fundamental para o desempenho de um GA.



Princípios de Escolha da Representação

- Representatividade
 - deve representar todo o espaço de busca relevante ao problema
- Schemata
 - deve prestigiar a formação de schemata curtos e de baixa ordem
- Alfabeto
 - deve utilizar um alfabeto mínimo que permita a expressão natural do problema

